

Title	函数方程式 $f(f(x))=F(x)$ 二就テ II
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 58 p.6-p.8
Issue Date	1935-09-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74124
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

202. 函數方程式 $f(f(x)) = F(x)$ 就テ II

南雲道夫 (阪大)

変數が *real* , 時ニハ適當ニ假定ノ下ニ一般ニ

$$\underbrace{f \circ f \cdots f}_{\ell} (x) = F(x)$$

ナル函數方程式が解カレルコトヲ前ニ示シタ。即チ補助ノ函數方程式

$$\varphi(t+1) = F(\varphi(t))$$

ヲ解ケバ

$$f(x) = \varphi\left(\varphi^{-1}(x) + \frac{1}{\ell}\right)$$

が解デアル。此ノ際解ハ非常ニ大キナ自由度ヲ持ツ。

I. 次ニ $F(x)$ が $x = x_0$ デ解析的止則デ、且ツ

$$F(x_0) = x_0.$$

ナル場合 =、 x_0 デ正則デ $f(x_0) = x_0$ ナルヲナ解ヲ求
メテ見ヨウ。

$x_0 = 0$ ト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。今度ハ $x = 0$
ガ、 $F(x) = x'$ ナル変換ノ 不動点 デアルカラ、之レヲ
Translation = 改メルヲナ寫像が出来ナイ。然シ原
点ヲ中心トスル 相似変換

$$t' = \lambda t \quad (\lambda; \text{常數})$$

= 改メル様ナ寫像ガ 一般 = ハ可能デアル。即チ

$$\varphi(\lambda t) = F(\varphi(t))$$

ガ $t=0$ デ正則ナ解 ($\varphi'(0) \neq 0$) $\varphi(t)$ ナ持テバ

$$f(x) = \varphi(\lambda^{\frac{1}{\lambda}} \varphi^{-1}(x))$$

ガ求ムル解デアルコトガ容易ニナル。

II. カクシテ我々ハ

$$\varphi(\lambda t) = F(\varphi(t))$$

ヲ解カネバナラヌ。 $F(x) = Cx + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots$,

$\varphi(t) = a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots$ ト置イテ両辺 = λ 代入シ
 t^n ノ係數ヲ比較スルコト = ヨリ形式的 = 順次 = a_n ヲ求メ
ルコトが出来ル。(但シ $C \neq 1$) 此ノ場合 = $\lambda = C$ デナケ
レバナラヌ。又 $\varphi(t)$ ハーツノ不定常數ヲ含ム。

[$\varphi(t)$ ノ代リ = $\varphi(\lambda t)$ トオイテモ解デアルカラ] 故ニ我
々ハ $\varphi'(0) = 1$ ト假定スル。

上ノ不定係數ノ方法デハ、カクシテ得ラレタ Γ 級數ノ收
斂ノ吟味ガムツカシイ。ソコデ我々ハ $\varphi^{-1}(x) = \psi(x)$ トオケ

バ函数方程式ハ $\{t = \psi(x) = \text{ヨリ}\}$

$$\lambda \psi(x) = \psi(F(x))$$

トナル。之ハ Schröder ノ函数方程式ト云ハレル。

(福原氏, 常微分方程式論 195 頁)

$|\lambda| > 1$ ($\lambda = c$) ノトキ $=$ ハ $F(x)$ ノ逆函数ヲ $G(x)$ トスレバ

$$\psi(G(x)) = \frac{1}{\lambda} \psi(x)$$

トナリ、 $|\lambda| < 1$ ノ場合 $=$ 帰着出来ル。故 $= |\lambda| < 1$ ト假定スル、シカラバ

$$\lambda^{-n} \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_n(x) = F_n(x) \quad (\lambda = c)$$

トオケバ、 $F_n(x)$ ハ $x=0$ ノ充分近クデ一様 $=$ 収斂スル。

(福原氏, 常微分方程式論 195 頁 —— 197 頁参照) 又

$$\lambda F_{n+1}(x) = F_n(F(x))$$

デアルカラ $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \psi(x)$ トオケバ

$$\lambda \psi(x) = \psi(F(x)). \quad \text{又 } \psi'(0) = 1.$$

故 $=$ $c \neq 0$, 且ツ $|c| \neq 1$ ノ場合 $=$ 於テ問題ハ解決シタ。

然シ只不動点ノ近傍ダケテ全体ノ様子ハサツベリ分ラナイ。

余マデノ所ハ見越ノ類デアラウ、全体的考察ヨリ大問題デア
ル。